

## **Лекция 6**

**Геометрические характеристики плоских сечений**

**Статические моменты сечений**

**Центр тяжести сечения**

**Моменты инерции**

**Моменты сопротивления**

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

При растяжении стержня напряжения во всех точках одинаковы, поэтому его напряженное состояние определяется **внешней нагрузкой и площадью поперечного сечения**, но не зависит от его формы.

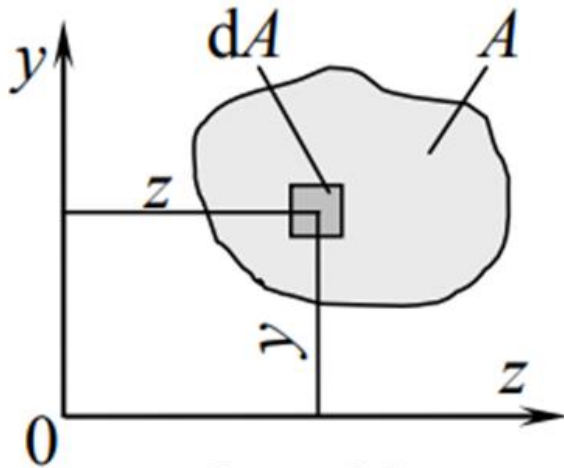
В случае изгиба и кручения брусьев напряжения в точках поперечного сечения зависят от его **формы и размеров**, а при изгибе еще и от его **ориентации** к направлению нагрузок.

**Кроме площади поперечное сечение характеризуется:**

- **статическим моментом площади;**
- **моментами инерции;**
- **радиусами инерции;**
- **моментами сопротивления.**

## СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ

**Статический момент площади** – распространенная на всю площадь сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на расстояние от них до этой оси



$$S_z = \int_A y \cdot dA,$$

$$S_y = \int_A z \cdot dA.$$

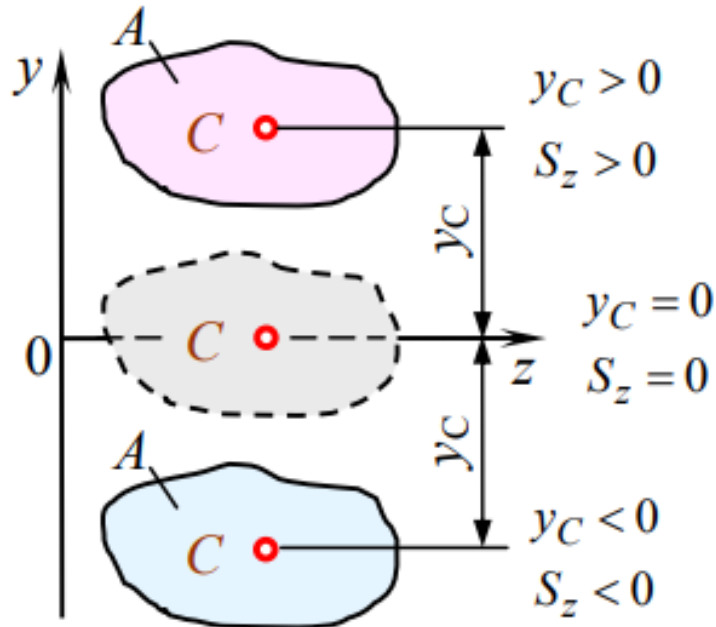
$$[S] = [\text{см}^3]$$

Это понятие аналогично моменту силы относительно оси. Если предположить, что  $A$  – вес пластины, имеющей форму нашего сечения, то статический момент  $S_z$  – это момент силы тяжести пластины относительно оси  $z$ .

## ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ

**Центральная ось** – ось, относительно которой статический момент площади равен нулю.

**Центр тяжести сечения** – точка пересечения центральных осей.



Связь знака статического момента площади с его положением в координатной системе

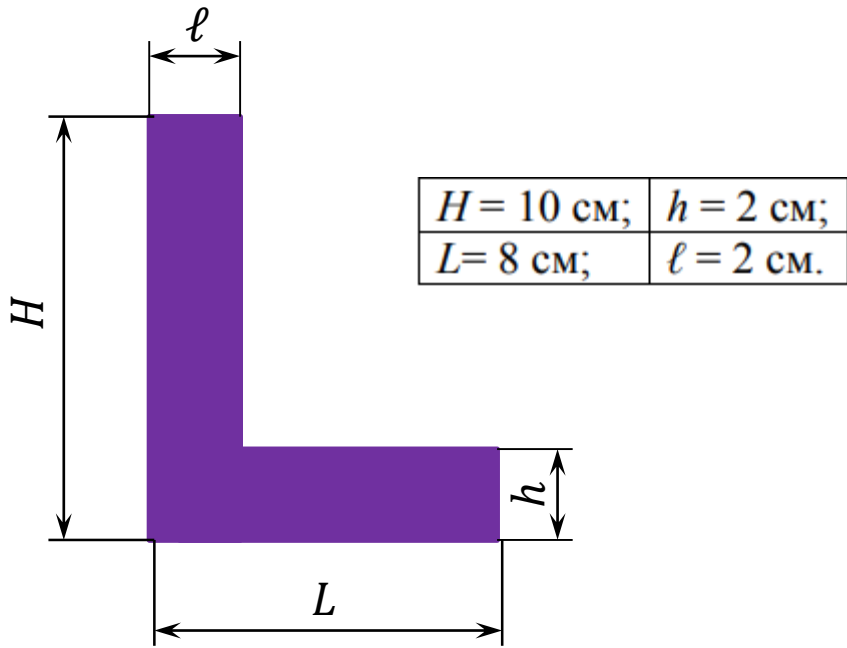
Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось является центральной.

Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения.

При известных статических моментах частей сечения можно найти координаты центра тяжести составной фигуры:

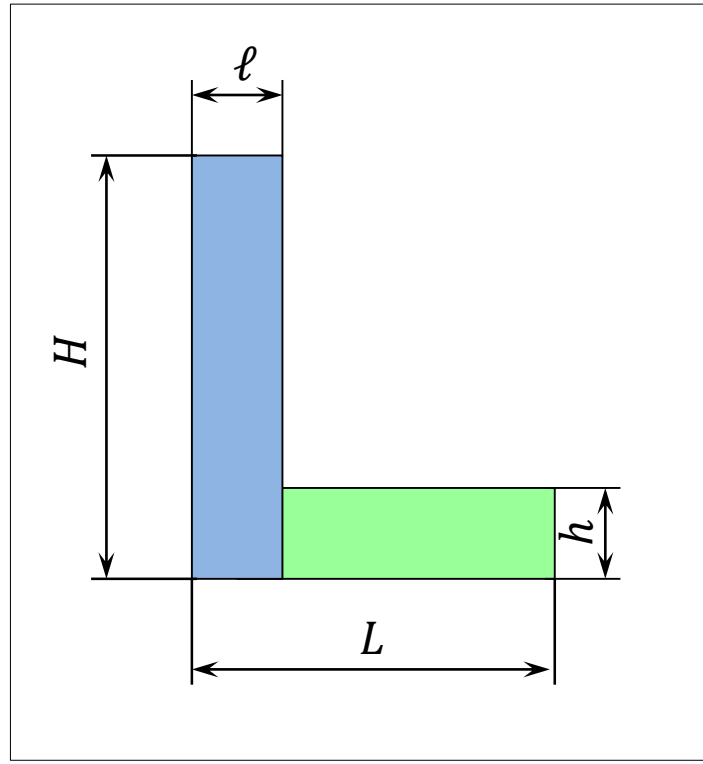
$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 + \dots + z_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}; \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \dots + y_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

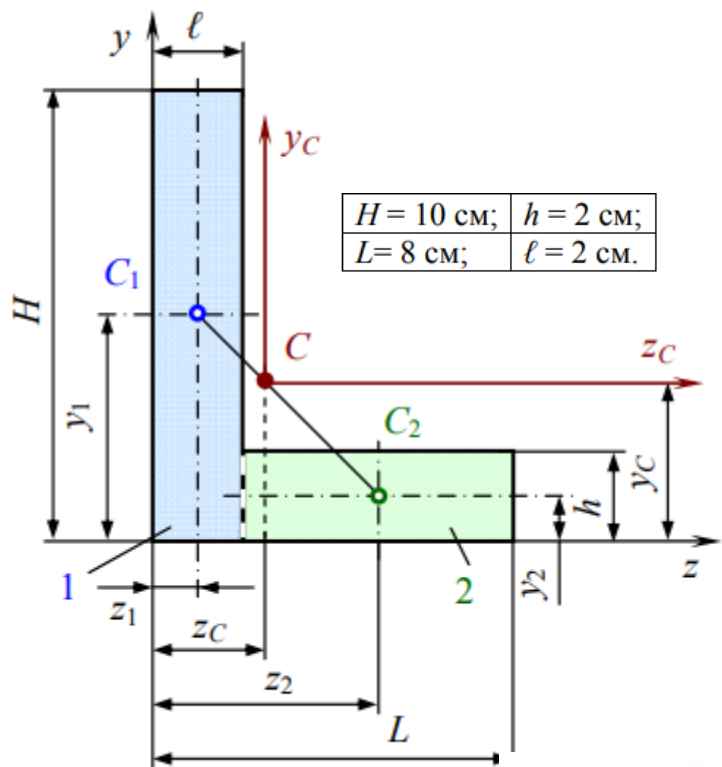
**Определение положения центральных осей, параллельных основанию и высоте фигуры**



Разбиваем сложную фигуру на две простые, в конкретном примере – на два прямоугольника.

Их центры тяжести расположены посередине высоты и посередине ширины.





## Координаты центров тяжести и площади простых фигур

$$z_1 = \frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см}; \quad y_1 = \frac{H}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см};$$

$$z_2 = l + \frac{L-l}{2} = 2 + \frac{8-2}{2} = 5 \text{ см}; \quad y_2 = \frac{h}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$A_1 = l \cdot H = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = (L-l)h = (8-2)2 = 12 \text{ см}^2.$$

## Статические моменты площадей простых фигур

$$S_{z1} = y_1 \cdot A_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ см}^3; \quad S_{y1} = z_1 \cdot A_1 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ см}^3;$$

$$S_{z2} = y_2 \cdot A_2 = 1 \cdot 12 = 12 \text{ см}^3; \quad S_{y2} = z_2 \cdot A_2 = 5 \cdot 12 = 60 \text{ см}^3.$$

## Координаты центра тяжести составной фигуры

$$z_c = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{20 + 60}{20 + 12} = 2,5 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_{z1} + S_{z2}}{A_1 + A_2} = \frac{100 + 12}{20 + 12} = 3,5 \text{ см}.$$

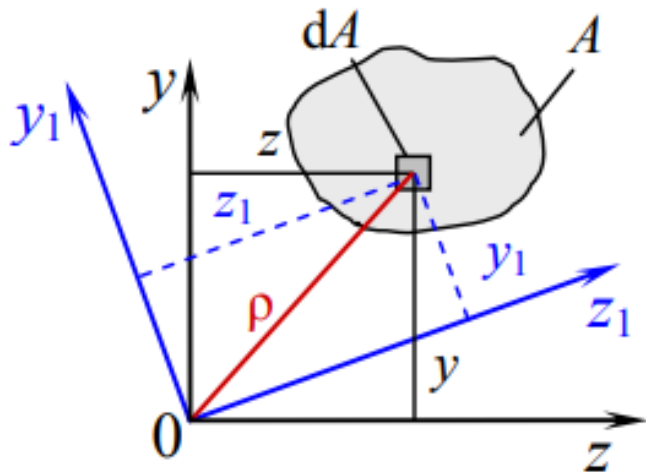
Через найденную точку проводим **центральные оси**  $Z_C$  и  $Y_C$ , параллельные основанию фигуры и ее высоте.

**Центр тяжести фигуры С**, составленной из двух частей, лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых фигур ее составляющих, причем расстояния до них обратно пропорциональны площадям простых фигур.

Если сложная фигура составлена из нескольких простых, то общий центр тяжести находится внутри многоугольника, вершинами которого являются центры тяжести простых фигур.

# МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

**Момент инерции** – распространённая на всю площадь сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты расстояний от них до этой оси.



**Осевые моменты инерции**

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA,$$

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA$$

**Полярный момент инерции**

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

$\rho$  – расстояние от площадки  $dA$  до точки (полюса), относительно которого вычисляется полярный момент инерции

Полярный момент инерции связан с осевыми моментами инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A (z_1^2 + y_1^2) dA$$

то есть для любой пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс

$$I_p = I_z + I_y = I_{z1} + I_{y1}$$

**Центробежный момент инерции**

определяется интегралом произведений элементарных площадей на их расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA$$

Осевые и полярный момент инерции всегда положительны, центробежный момент инерции может принимать значения «+», «-» и ноль.

Если фигура имеет ось симметрии, то относительно этой оси центробежный момент инерции равен нулю

Размерность  
моментов инерции

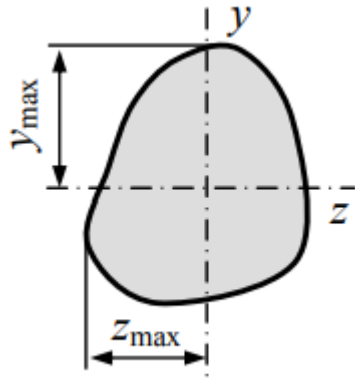
$$[\text{см}^4]$$

## МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

**Момент сопротивления** – отношение момента инерции к расстоянию до наиболее удаленной точки.

**В расчетах на прочность при изгибе**

используют осевые моменты сопротивления



$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}$$

**Для прямоугольника**

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{b^3h}{12} \frac{2}{b} = \frac{b^2h}{6}$$

**В расчетах на прочность при кручении**

сечений круглого профиля используют полярный момент сопротивления

**Для круга**

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{16}$$

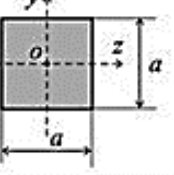
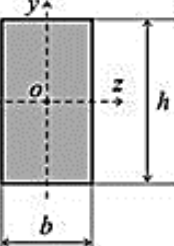
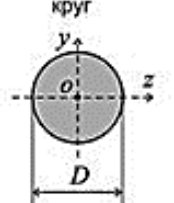
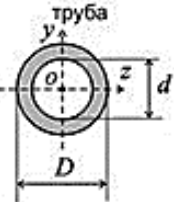
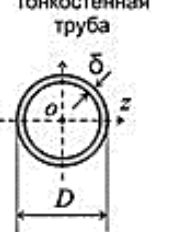
**Для кольца**

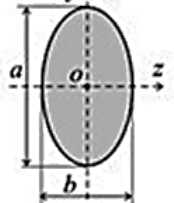
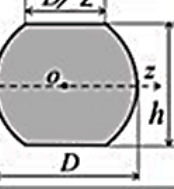

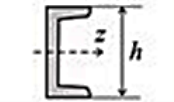

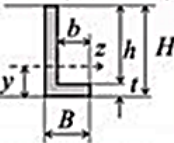
$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \frac{2}{D} (1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \quad c = \frac{d}{D}$$

Для сечений некруглого профиля моменты инерции и моменты сопротивления вычисляют по специальным формулам, включающим высоту и ширину профиля



# МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ И МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ различных сечений

| Форма сечения   | Площадь сечения                                      | Момент инерции  | Момент сопротивления  |
|---|--|---|---|
|   |  | радиус инерции  |   |
| квадрат<br>              | $F = a^2$  | $I_z = I_y = \frac{a^4}{12}$                                    | $W_z = W_y = \frac{a^3}{6}$                                     |
| $i_z = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}}$   |  |   |   |
| прямоугольник<br>        | $F = bh$   | $I_z = \frac{bh^3}{12}$   | $W_z = \frac{bh^2}{6}$  |
| $I_y = \frac{hb^3}{12}$   |  | $W_y = \frac{hb^2}{6}$  |   |
| круг<br>                 | $F = \frac{\pi D^2}{4}$                              | $I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,0491D^4$              | $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3$                 |
| $i_z = i_y = \frac{D}{4}$   |  |   |   |
| труба<br>               | $F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$                       | $I_z = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$                         | $W_z = W_y = \frac{2I_z}{D}$                                    |
| $i_z = i_y = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \frac{d^2}{D^2}}$  |  |   |   |
| Тонкостенная труба<br> | $F = \pi D \delta$<br>при $\delta \leq \frac{D}{20}$ | $I_z = I_y = \frac{\pi D^3 \delta}{8} \approx 0,3927D^3 \delta$ | $W_z = W_y = \frac{\pi D^2 \delta}{4} \approx 0,7854D^2 \delta$ |
| $i_z = i_y = 0,353D$  |  |   |   |

| Форма сечения   | Площадь сечения              | Момент инерции                               | Момент сопротивления                                    |
|---|------------------------------|--|---|
|   |                              | радиус инерции                               |   |
| овал<br>                                 | $F = \frac{\pi ab}{4}$       | $I_z = \frac{\pi ba^3}{64}$                  | $W_z = \frac{\pi ba^2}{32}$                             |
| $I_y = \frac{\pi ab^3}{64}$   |                              | $W_y = \frac{\pi ab^2}{32}$                  |   |
|   |                              | $i_z = \frac{a}{4} \quad i_y = \frac{b}{4}$  |   |
| тесаное бревно<br>                       | $h = 0,866D$                 | $I_z = 0,039D^4$                             | $W_z = 0,088D^3$  |
| $i_z = 0,223D$  |                              |  |   |
| железнодорожный рельс<br>                | $F \approx 0,238h^2$         | $I_z \approx 0,032h^4$                       | $W_z \approx 0,064h^3$                                  |
| $i_z = 0,37h$   |                              |  |   |
| прокатный швеллер<br>                   |                              |  | $W_z \approx \frac{(h+5)^3}{81}$                        |
| прокатный двутавр<br>                  |                              |  | $W_z \approx \frac{(h+2)^3}{51}$                        |
| неравнополочный уголок (не прокат)<br> | $F = t(B+h)$<br>$F = t(b+H)$ | $I_z = \frac{t(H-y)^3 + By^3 - b(y-t)^3}{3}$ | $W_{zH} = \frac{I_z}{y} \quad W_{zB} = \frac{I_z}{H-y}$ |